

GARA6 2022-23 SECONDARIA DI SECONDO GRADO INDIVIDUALE

ESERCIZIO 1

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023, MOVIMENTI IN UN FLUSSO DI CANALI

PROBLEMA

Un reticolo di canali è descritto dalle seguenti due tabelle:

$sv(a,10,6)$, $s(b,4)$, $s(c,4)$, $sv(d,10,6)$, $s(e,6)$, $s(f,2)$, $s(g,4)$

$r(a,b)$, $r(a,c,0.4)$, $r(d,c,1)$, $r(d,e)$, $r(b,f,1)$, $r(c,f,0.8)$, $r(e,g,0.3)$, $r(c,g,1)$

Disegnare il reticolo, evitando incroci, e determinare la quantità di acqua che esce dal nodo-sorgente f.

f	
---	--

SOLUZIONE

f1	16.5
----	------

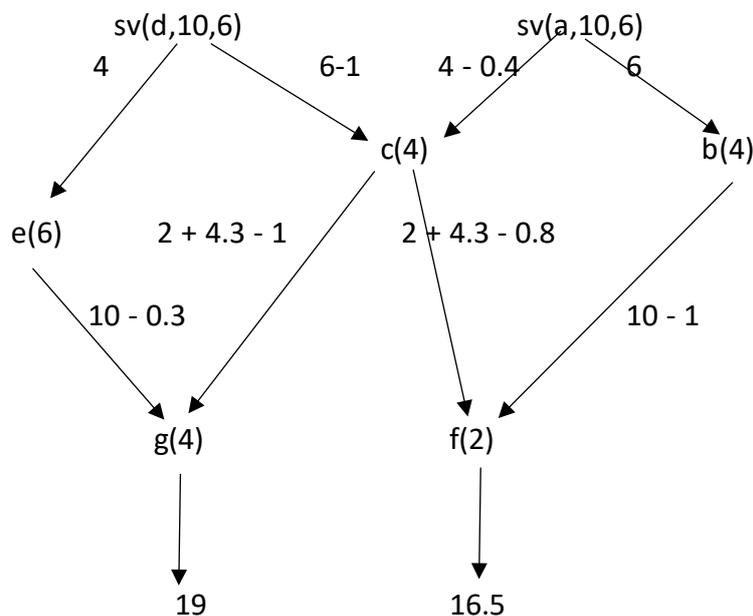
f2	14.5
----	------

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Le soluzioni erano due e dipendevano dalla collocazione nel reticolo delle sorgenti iniziali **d** ed **a**

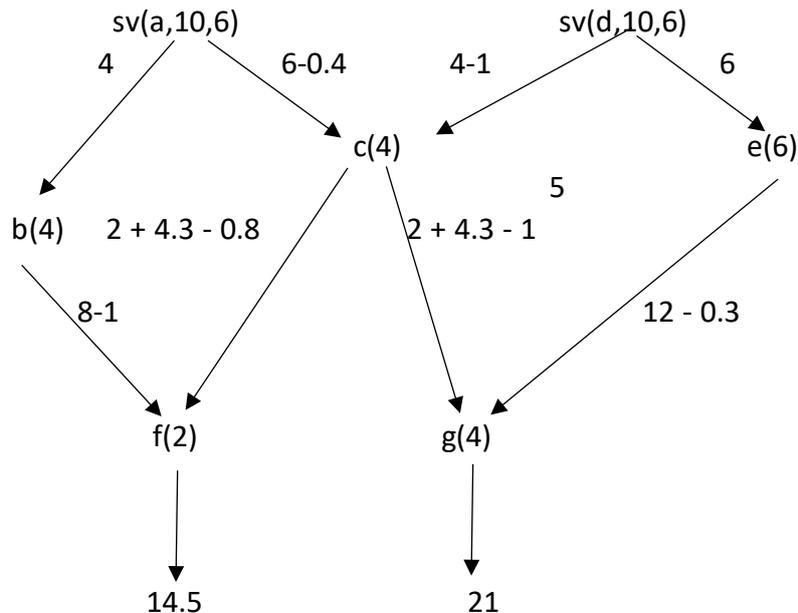
Prima soluzione (sorgente **d** a sinistra e sorgente **a** a destra)

Occorre essenzialmente disegnare il reticolo; la portata delle sorgenti è assegnata; la soluzione segue applicando le regole per calcolare la portata dei canali.



Seconda soluzione (sorgente a a sinistra e sorgente d a destra)

Occorre essenzialmente disegnare il reticolo; la portata delle sorgenti è assegnata; la soluzione segue applicando le regole per calcolare la portata dei canali.



NOTA. La doppia soluzione è stata evidenziata al termine della prova e di questo se ne è tenuto conto ai fini della graduatoria. Il CTS nella guida OPS 2023-24 terrà conto di questa problematica, e attiverà su questa tipologia di problemi nuove regole per rendere unica la soluzione.

ESERCIZIO 2

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023, ROBOT E AUTOMI e a **quanto segue**.

L'automata di cui tratta il seguente problema presenta un funzionamento diverso rispetto ai robot visti.

L'automata presentato nel problema è descritto da quattro insiemi finiti:

- l'insieme degli stati: gli stati descrivono la condizione del robot-automata in un determinato momento; vengono indicati con lettere maiuscole
- l'insieme degli input: l'input è inteso come comando e viene indicato con lettere minuscole
- l'insieme delle regole del funzionamento: indicano come l'automata passa da uno stato all'altro; per esempio, se esiste una regola che permette all'automata di passare da uno stato A allo stato B tramite un input c, nel momento in cui l'automata si trova nello stato A e riceve l'input c passa allo

stato B.

- L'insieme degli output: prima di cambiare stato l'automa genera un output, che può essere una stringa, un intero oppure un simbolo che indica all'automa cosa fare in base ai precedenti output

Le regole sul funzionamento possono essere descritte tramite una tabella, come ad esempio:

	a	b
A	B,1	C,12
B	D,2	A
C	-	-
D	B,+	B,1

Secondo la quale:

- se l'automa si trova nello stato A e riceve input a, genera come output il numero 1 e passa allo stato B, se riceve input b, genera come output 12 e passa allo stato C
- se l'automa si trova nello stato B e riceve input a, genera output 2 e passa allo stato D, se riceve input b, non genera nessun output e passa allo stato A
- se l'automa si trova nello stato D e riceve input b, genera come output il numero 1 e passa allo stato B.
- se l'automa si trova nello stato D e riceve input a, supponiamo che il simbolo + indichi che: se nella stringa numerica generata è presente un 2 essa verrà cancellata, altrimenti verrà effettuata l'addizione +4.

Esempio1 L'output totale generato fino a quel momento è 112, allora l'automa prima di passare allo stato B cancellerà l'intera stringa.

Esempio2 L'output totale fino a quel momento è 111 allora l'automa prima di passare allo stato B modificherà l'output effettuando l'addizione $111+4=115$

1. il simbolo “-” sta a indicare che non è definita nessuna regola di funzionamento per lo stato e l'input corrispondente; di conseguenza se l'automa, seguendo l'esempio, si trova nello stato C e riceve input a o b va in errore e si ferma.

In alternativa, le regole sul funzionamento sono definite tramite una funzione f, chiamata funzione di transizione. Tale funzione prende in input uno stato e un input e restituisce uno stato e un output. La tabella può essere tradotta quindi in:

2. $f(A,a)=B,1$; $f(A,b)=C,12$;
3. $f(B,a)=D,2$; $f(B,b)=A$;
4. $f(D,a)=B,+$; $f(D,b)=B,1$

E non preoccupatevi, l'e-mail non è stata generata da RandomLetters!"

Invidiosa del macchinario che ha semplificato la vita da professore di matematica del marito IdkMaths, la signora professoressa di lettere IAdoreDa, non appena sente l'annuncio prende il pc e ordina il rivoluzionario macchinario. Così come fece il marito con RandomNumbers, anche lei decide di portarlo a scuola e scoprirlo con i propri studenti.

Essendo decisamente negata con la tecnologia, lascia agli studenti il compito di leggere le istruzioni e capire il funzionamento di "RandomLetters!", così da farselo spiegare con parole più semplici. Le istruzioni si presentarono suddivise in due paragrafi:

Tabella stati/input

	1	2	3	4	5	6
A	B, aa	C, ab	-	A, a	E, e	D, abc
B	B, b	E, ca	D, dd	E, ef	A, zt	-
C	D, ct	E, bav	-	C, bc	-	B, abc
D	D, xxx	A, hig	D, gmn	B, alm	E, 10	C, cdi
E	E, -	A, +	C, /	-	-	D, a

Simboli speciali

Il simbolo – indica che:

- prima di passare allo stato successivo, viene cancellata l'ultima lettera dell'output.
Ad esempio, se RandomLetters! arriva allo stato E con output totale *bav* e riceve input 1, prima di tornare nello stato E modifica l'output in *ba*

Il simbolo + indica che:

- se l'output generato fino all'arrivo dello stato E contiene uno o più numeri, la stringa viene cancellata.
Ad esempio, se RandomLetters! arriva allo stato E con un output totale di *abc10* e riceve come input 2, prima di passare allo stato A cancella l'output
- se l'output generato fino all'arrivo dello stato E contiene due o più lettere *a*, vengono cancellate tutte le *a* della stringa.
Ad esempio, se RandomLetters! arriva allo stato E con output totale *aaef* e riceve come input 2, prima di passare allo stato A, RandomLetters! trasforma l'output in *ef*
Se nella stringa sono presenti sia più *a* che numeri, la stringa viene cancellata.

Il simbolo / indica che:

- prima di passare allo stato successivo, vengono cancellate tutte le consonanti.

6. comando 2: legge l'output generato ztaaddcdibav e dato che sono presenti più di due a, trasforma l'output in ztdcdibv e dallo stato E passa allo stato A

La stringa P1 generata risulta essere P1= ztdcdibv

La stringa generata è *xxxhigabbcba* a partire dallo stato D, sapendo che la lista di comandi e di stati deve essere di 6 elementi:

1. dallo stato D per generare xxx, bisogna dare il comando 1 e si resta nello stato D con output xxx
2. dallo stato D per generare hig, bisogna dare il comando 2 e si passa allo stato A (nuovo output xxxhig)
3. dallo stato A per generare ab, bisogna dare il comando 2 e si passa allo stato C (nuovo output xxxhigab)
4. dallo stato C si può generare bc, bisogna dare il comando 4 e si resta nello stato C (nuovo output xxxhigabbc)
5. dallo stato C per generare bav invece che ba, bisogna dare il comando 2 e si passa allo stato E (nuovo output xxxhigabbcbav)
6. dovendo ottenere ba invece che bav, bisogna dare il comando 1 e si resta nello stato E (nuovo output xxxhigabbcbav)

La lista di comandi L2 risulta essere L2=[1,2,2,4,2,1] e la lista degli stati S1 [D,A,C,C,E,E]

ESERCIZIO 3

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023, CRITTOGRAFIA

PROBLEMA

1. Usando il cifrario di Cesare, decriptare il messaggio

UYEXXVS XVI QRYH XCCX

sapendo che:

- le parole cifrate rappresentano numeri in lettere, a singola cifra;
- non si conosce la chiave con cui è stata cifrata la prima parola;
- la seconda parola è stata cifrata con una chiave pari al valore della cifra della prima parola;
- la terza parola è stata cifrata con una chiave pari al valore della cifra della seconda parola;
- la quarta parola è stata cifrata con una chiave pari al valore della cifra della terza parola.

2. Decriptare il messaggio:

VSUTUE TM SXILE

sapendo che è stato criptato 2 volte con una chiave di criptazione di cui si conosce il frammento:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	N	C	L		B	R	V		G	U	Y	O	P	W	I	E	K	T	D	F	A	X	Z	M	J

e sapendo che

- la parola CHIOSCO criptata con la medesima chiave (una sola volta) diventa CVSWTCW
- EFHLKW è la parola che si ottiene cifrando con la medesima chiave (una sola volta) la parola QUADRO

3. Usando un algoritmo di criptazione a sostituzione polialfabetica, decriptare il messaggio CIVVI VOAOKTBTI JOMFFIBVI usando la tavola Vigenère, sapendo che è stato criptato 79 volte con chiave CAB (ogni volta criptando il risultato della criptazione precedente)

Scrivere le risposte nella riga corrispondente della tabella sottostante:

1	
2	
3	

SOLUZIONE

1	QUATTRO TRE NOVE OTTO
2	APRIRE IL PONTE
3	AIUTI UMANITARI IMMEDIATI

COMMENTI ALLA SOLUZIONE.

1) L'unica cifra il cui nome è una parola di 7 lettere è QUATTRO.

Q si critta in U, U si critta in Y ecc. in chiave 4

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
4	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d

Pertanto, anche la parola XVI si decritta con chiave 4 in TRE

Con chiave 3

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
3	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c

Ora decrittiamo la parola QRYH in NOVE.

Infine, con chiave 9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
9	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i

decrittiamo l'ultima parola XCCX in OTTO.

2)Utilizzando le corrispondenze tra

CHIOSCO con CVSWTCW e QUADRO con EFHLKW otteniamo la seguente chiave

parziale (corrispondenza E mancante)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
H	N	C	L		B	R	V	S	G	U	Y	O	P	W	I	E	K	T	D	F	A	X	Z	M	J

Un veloce controllo sulla "lettera mancante" nella seconda riga ci permette di trovare la corrispondenza E con Q che completa la chiave.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
H	N	C	L	Q	B	R	V	S	G	U	Y	O	P	W	I	E	K	T	D	F	A	X	Z	M	J

Finalmente decrittiamo il messaggio VSUTUE TM SXILE utilizzando la chiave due volte.

V	S	U	T	U	E		T	M		S	X	I	L	E
H	I	K	S	K	Q		S	Y		I	W	P	D	Q
A	P	R	I	R	E		I	L		P	O	N	T	E

Consideriamo il messaggio criptato CON LA CHIAVE CAB:

C	I	V	V	I		V	O	A	O	K	T	B	T	I		J	O	M	F	F	I	B	V	I
C	A	B	C	A		B	C	A	B	C	A	B	C	A		B	C	A	B	C	A	B	C	A

Una prima considerazione è la seguente: le lettere criptate usando sempre la chiave A corrispondono a se stesse.

Quindi una prima versione del messaggio decriptato sarà

-	I	-	-	I		-	-	A	-	-	T	-	-	A		-	-	M	-	-	I	-	-	I
---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Consideriamo ora le lettere decrittate con B

Prendendo una lettera e decrittando in chiave B si vede che le lettere successive seguono l'ordine alfabetico al contrario e dopo 26 applicazioni si ritorna alla stessa lettera.

Es. O – N – M – L – K – J – I – H – G – F – E -- D – C – B – A – Z – Y – X – W – V – U – T
 -- S – R – Q – P -- O

Allora tenendo presente che $79 = 26 * 3 + 1$

segue che dopo 79 decrittazioni otteniamo la lettera successiva (nella sequenza) alla lettera di partenza

C	I	V	V	I		V	O	A	O	K	T	B	T	I		J	O	M	F	F	I	B	V	I
C	A	B	C	A		B	C	A	B	C	A	B	C	A		B	C	A	B	C	A	B	C	A
	I	U		I		U		A	N		T	A		I		I		M	E		I	A		I

Consideriamo ora le terre decrittate con C.

Prendendo una lettera e decrittando in chiave C si vede che le lettere successive seguono l'ordine alfabetico al contrario e alternato di uno la sequenza. Dopo 13 applicazioni si ritorna alla stessa lettera.

Es. C – A – Y -- W – U – S – Q – O – M – K – I – G – E -- C

Allora tenendo presente che $79 = 13 * 6 + 1$

segue che dopo 79 decrittazioni otteniamo la lettera successive (nella sequenza).

Questo permette di decriptare interamente il messaggio

C	I	V	V	I		V	O	A	O	K	T	B	T	I		J	O	M	F	F	I	B	V	I
C	A	B	C	A		B	C	A	B	C	A	B	C	A		B	C	A	B	C	A	B	C	A
A	I	U	T	I		U	M	A	N	I	T	A	R	I		I	M	M	E	D	I	A	T	I

ESERCIZIO 4

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023, GRAFI e a **quanto segue**.

Date due liste L1 ed L2 di N parole ordinate alfabeticamente, diciamo che L1 *precede lessicograficamente* L2 se esiste un numero $K < N$ tale che le prime K-1 parole delle due liste sono uguali, mentre la K-esima parola di L1 precede alfabeticamente la K-esima parola di L2. Ad esempio tra **[gelato,pizza,ananas]** e **[gelato,panino,fragola]**, si ha che **[gelato,panino,fragola]**, precede lessicograficamente **[gelato,pizza,ananas]** in quanto in questo caso K vale 2, ovvero le prime parole delle due liste sono uguali mentre la parola **panino** precede alfabeticamente **pizza**.

PROBLEMA

La sede dell'azienda ACME è dotata di una rete di ultima generazione che collega tutti i computer e ne permette la reciproca comunicazione. Più precisamente la rete è suddivisa in sottoreti e le informazioni che

viaggiano tra i computer utilizzano dei router, sparsi per l'azienda, per passare di sottorete in sottorete. Il collegamento fra sottoreti è così descritto:

1. Il collegamento tra due sottoreti è a senso unico: quindi date due sottoreti A e B, se esiste un collegamento tra A e B, non esiste un collegamento tra B e A.
2. Inoltre, inviare un insieme di dati (chiamato "pacchetto" nel gergo delle reti di dati) da una sottorete A ad una sottorete B, ha un costo in termini di tempo.

Un collegamento tra due sottoreti può essere descritto mediante termini che hanno il seguente formato:

collegamento(<sottorete-1>,<sottorete-2>,<durata-spostamento-pacchetto>)

Dopo l'ultima riprogettazione, la rete di ACME è descritta dal seguente insieme di termini:

collegamento(A,C,7)	collegamento(A,F,7)
collegamento(B,E,7)	collegamento(B,G,12)
collegamento(C,E,2)	collegamento(D,C,6)
collegamento(D,A,3)	collegamento(D,F,5)
collegamento(E,H,3)	collegamento(F,H,10)
collegamento(G,C,14)	collegamento(H,B,11)
collegamento(H,D,4)	

Il tecnico Antonio deve revisionare la rete e viene da te per avere informazioni generali. Vuole sapere:

- La lista L1 delle sottoreti *maggiormente collegate*, ovvero con il maggior numero complessivo di collegamenti in uscita ed in ingresso. Ordinare la lista in ordine lessicografico.
- La sequenza di sottoreti C1, con tempo di spostamento minimo, che un pacchetto deve attraversare, se si effettua un invio di dati dalla rete A alla rete G, facendo in modo che ogni sottorete venga attraversata al massimo una sola volta. Nella lista includere il nodo di ingresso e quello di uscita
- La sequenza di sottoreti C2, con tempo di spostamento minimo, che un pacchetto deve attraversare se si effettua un invio di dati dalla rete B alla rete C, facendo in modo che ogni sottorete venga attraversata al massimo una sola volta. Nella lista includere il nodo di ingresso e quello di uscita.

L1	[]
----	-----

F	A, D	H	3
G	B	C	2
H	E, F	B, D	4

da cui risulta che le sottoreti più collegate sono C, D, H. Quindi $L1 = [C,D,H]$.

Nella seconda domanda ci viene chiesto di trovare il cammino semplice di costo minimo dal nodo A al nodo G. Nella tabella sono elencati i soli due possibili cammini semplici.

Cammino	Costo
A,F,H,B,G	40
A,C,E,H,B,G	35

Il cammino C1 sarà quindi $[A,C,E,H,B,G]$.

Nella terza domanda ci viene chiesto di trovare il cammino semplice minimo dal nodo B al nodo C. Nella tabella sono elencati i soli tre possibili cammini semplici.

Cammino	Costo
B,G,C	26
B,E,H,D,C	20
B,E,H,D,A,C	24

pertanto, il cammino C2 sarà $[B,E,H,D,C]$.

ESERCIZIO 5

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023 - ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

```

procedure CALCOLO1;
variables A, B, M, K integer;
input A;
M = 0;
K = 2;
while K < 100 do

```

```

input B;
while A > B do
  M = M + 3;
  K = K * 2;
  B = B + 1;
endwhile;
endwhile;
output M;
endprocedure;
  
```

I valori di input per A e B sono rispettivamente 20 e 5. Determinare il valore in output di M e scriverlo nella casella sottostante.

M	
---	--

SOLUZIONE

M	45
---	----

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Si eseguono passo a passo, le operazioni indicate ponendo attenzione al fatto che la variabile B assumerà dentro il ciclo più interno while i valori da 6 a 20. La variabile M viene aggiornata sommando 3 al suo valore precedente ogni volta che ciò succede.

while 20 > B									
M	3	M	6	M	9	M	12	M	15
K	4	K	8	K	16	K	32	K	64
B	6	B	7	B	8	B	9	B	10
M	18	M	21	M	24	M	27	M	30
K	128	K	256	K	512	K	1024	K	2048
B	11	B	12	B	13	B	14	B	15
M	33	M	36	M	39	M	42	M	45
K	4096	K	8192	K	16384	K	32768	K	65536
B	16	B	17	B	18	B	19	B	20

Dopo il quindicesimo passaggio nel ciclo while più interno si esce e immediatamente si esce anche dal while principale perché K = 65536. Dunque, M = 45.

ESERCIZIO 6

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023 - ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

```

procedura CALCOLO2;
variables A, B, D real;
read A;
if A <= 50 then D = (0,05 * Y); B = X-Z; endif;
if A > 50 AND A <= 65 then D = (0,06 * Y); B = X-Z; endif;
if A > 65 then D = (0,1 * Y) ; B = X-Z; endif;
write B;
endprocedura;
```

Questa procedura calcola il valore B ottenuto scontando una certa percentuale dal valore iniziale di A (percentuale crescente rispetto al valore di partenza). Trovare le sostituzioni per i simboli X, Y e Z con appropriati nomi di variabili dichiarate nella procedura e scriverli nella tabella sottostante.

X	
Y	
Z	

SOLUZIONE

X	A
Y	A
Z	D

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

In D viene memorizzato lo sconto sul valore iniziale A, per cui $Y = A$.

In B viene memorizzato il valore scontato, ottenuto togliendo da A lo sconto D; dunque, $X = A$ e $Z = D$.

ESERCIZIO 7

Si faccia riferimento alla GUIDA OPS 2023 - ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO e **quanto segue**:
 Se F e G sono due enunciati, allora l'enunciato F OR G è vero se uno dei due è vero, è falso solo quando entrambi sono falsi.

Esempi: 1) F = "2 è numero pari" e G = "3 è numero dispari" ;

F OR G è un enunciato vero perché sia F che G sono veri

2) F = "2 è numero dispari" e G = "3 è numero dispari" ;

F OR G è un enunciato vero perché G è vero.

3) F = "3 > 5" e G = "-2 > 8";

F OR G è un enunciato falso perché sono falsi sia F che G.

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

```

procedure CALCOLO3;
variables A, B, N, K, Y integer;
input A;
N = 1;
for K from 1 to 4 step 1 do
  input B;
  for Y from 1 to 3 step 1 do
    if (A <= B OR B < 5) then N = N * 3; endif;
  endfor;
endfor;
output N;
endprocedure;
    
```

Il valore di input per A è 5

I valori di input di B sono rispettivamente: 9, 3, 7, 2. Determinare il valore in output di N e scriverlo nella casella sottostante.

N	
---	--

SOLUZIONE

N	531441
---	--------

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Basta eseguire, passo a passo, le operazioni indicate. Ogni volta che il valore di A è minore o uguale di quello di B oppure il valore di B è minore di 5, il valore di N viene moltiplicato per 3.

A = 5 N = 1

K = 1 B = 9 enunciato $5 \leq 9$ OR $9 < 5$ vero

Y = 1 N = 3

Y = 2 N = 9

Y = 3 N = 27

K = 2 B = 3 enunciato $5 \leq 3$ OR $3 < 5$ vero

Y = 1 N = 81

Y = 2 N = 243

Y = 3 N = 729

K = 3 B = 7 enunciato $5 \leq 7$ OR $7 < 5$ vero

Y = 1 N = 2187

Y = 2 N = 6561

Y = 3 N = 19683

K = 4 B = 2 enunciato $5 \leq 2$ OR $2 < 5$ vero

Y = 1 N = 59049

Y = 2 N = 177147

Y = 3 N = 531441

ESERCIZIO 8

PROBLEM

Amelia, Benjamin, Camila, Daniel, Emily and Fabio have to sit around a circular table. How many possible ways to seat are there? When counting these combinations we say that two combinations are the same and need to be counted just once if all the people have respectively at their left and at their right the same person.

Write your answer as an integer number in the box below.

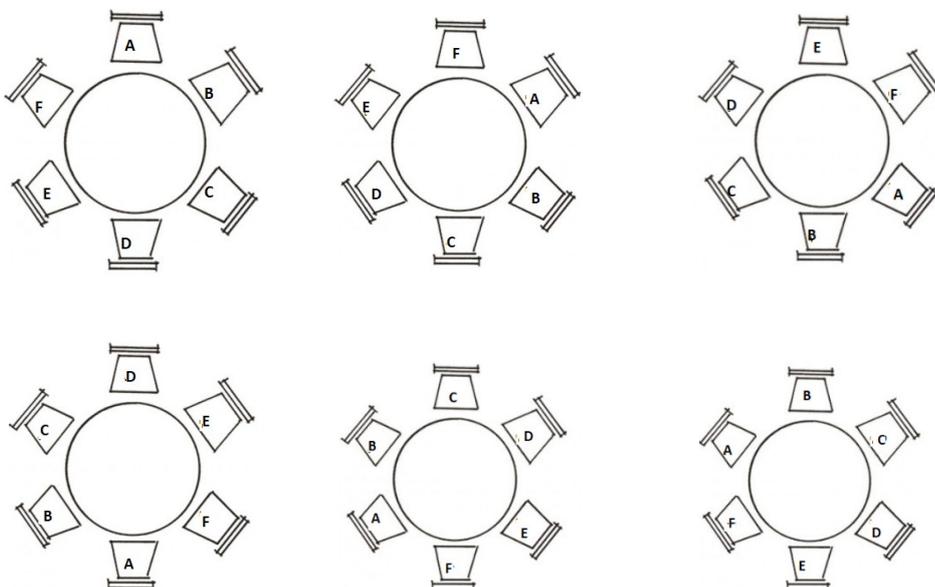
(Hint: the combinations [A,B,C,D,E,F], [F,A,B,C,D,E], [E,F,A,B,C,D] and so on are the same; the two combinations [A,B,C,D,E,F] and [C,B,A,D,E,F] are different)

SOLUTION

TIPS FOR THE SOLUTION

If we have to put six people in line there are $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ possible combinations.

But if we “close” that line in a circle we count each combination 6 times (one for each person from we “start to count” from).



So the answer is $720/6=120$.